– PANTHÉON - SORBONNE –
UNIVERSITÉ PARIS 1

Documents de Travail du
Centre d'Economie de la Sorbonne

CES Working Papers

C
E
S

L'approche *DARE* pour une mesure de risque diversifiée

Benjamin HAMIDI, Patrick KOUONTCHOU, Bertrand MAILLET

2010.32

Maison des Sciences Économiques, 106-112 boulevard de L'Hôpital, 75647 Paris Cedex 13
http://ces.univ-paris1.fr/cesdp/CES-docs.htm
ISSN : 1955-611X

L'approche *DARE* pour une mesure de risque diversifiée

Benjamin Hamidi* Patrick Kouontchou** Bertrand Maillet***

Résumé

Nous proposons dans cet article, à partir des approches de Taylor (2008) et de Gouriéroux et Jasiak (2008), d'agréger différents modèles de quantiles et d'expectiles afin d'obtenir une méthode plus robuste de calcul de la valeur-en-risque et de la perte conditionnelle maximale en diversifiant le risque de modèle. Cette nouvelle méthode exploite les techniques de régression sur quantiles afin d'obtenir une meilleure estimation des queues de distributions des rendements. Nous comparons notre mesure à la plupart des mesures de risques extrêmes disponibles, en utilisant les principaux tests de validation de la littérature. Cette comparaison menée sur données financières françaises, nous permet de confirmer les qualités de la méthode proposée.

Mots-clés : Mesures de risque, Expected Shortfall, Value-at-Risk, Expectile

Classification *JEL*: C14, C50, G11, G32.

* A.A.Advisors-QCG (ABN AMRO), Variances et Université Paris-1 (CES/CNRS). Courriel : benjamin.hamidi@univ-paris1.fr.

** Variances et Université Paris-1 (CES/CNRS). Courriel : patrick.kouontchou@univ-paris1.fr.

*** A.A.Advisors-QCG (ABN AMRO), Variances et Université Paris-1 (CES/CNRS et IEF). Correspondance à : Bertrand Maillet, CES/CNRS, MSE, 106-112 Bd de l'Hôpital F-75647 Paris Cedex 13. Tel. : 0144078189/70 (fax). Courriel : bmaillet@univ-paris1.fr.

Nous remercions Georges Bresson, Christophe Boucher, Thierry Chauveau, Christophe Hurlin, Gilbert Colletaz, Grégory Jannin, Jean-Philippe Médecin, Paul Merlin et Tristan Roger pour leur aide, leurs encouragements, suggestions et corrections. Nos remerciements vont également aux participants des conférences *IRMC* (Venise, juin 2009) et de l'AFSE (Paris, septembre 2009). Le troisième auteur remercie l'Institut Europlace de Finance pour son soutien financier.

A DARE Approach for Diversified Extreme Risk Measures

Abstract

The objective of this paper is to provide a complete framework to aggregate different quantile and expectile models for obtaining more diversified Value-at-Risk and Expected Shortfall measures, by applying the diversification principle to model risk. Following Taylor (2008) and Gouriéroux and Jasiak (2008), we introduce a new class of models called Dynamic AutoRegressive Expectiles (DARE). We first briefly present the main literature about VaR and ES estimations, and we secondly explain the DARE approach and how expectiles can be used to estimate quantile risk measures. We finally use the main validation tests to compare the DARE approach to other traditional methods for computing extreme risk measures on the French stock market.

Keywords: Risk Measures, Expected Shortfall, Value-at-Risk, Expectile.
Classification *JEL*: C14, C50, G11, G32.

L'approche *DARE* pour une mesure de risque diversifiée

Introduction

La valeur-en-risque (*VaR* pour *Value-at-Risk*) mesure la perte potentielle d'un portefeuille, pour une période et un niveau de confiance donné. Les accords de Bâle de 1996 imposent aux institutions financières des contraintes de capital fondées sur cette mesure de risque. La *VaR* est ainsi devenue une mesure de risque de référence, même si elle fait aussi l'objet d'un certain nombre de critiques. En particulier, si cette mesure fournit une estimation de la perte potentielle pour un seuil de probabilité donné, elle ne donne aucune information sur le profil de risque une fois ce seuil de perte franchi. De plus, la valeur-en-risque ne vérifie pas la bonne propriété de sous-additivité[1]. L'utilisation de la valeur-en-risque conditionnelle (*Conditional Value-at-Risk*, *CVaR* ou *Expected Shortfall*, *ES* en anglais), qui est définie comme l'espérance conditionnelle des rendements en dessous du niveau de la *VaR*, permet alors de compléter l'information fournie par la *VaR*.

De nombreux modèles d'estimation de la *VaR* et de l'*ES* co-existent aujourd'hui. Cependant, aucune de ces méthodes ne semble valable dans toutes les configurations de marché et aucune non plus ne satisfait en général à l'ensemble des différents tests de validations proposés dans la littérature (*Cf.* Hurlin et Tokpavi, 2008). Le risque lié au choix du modèle est donc important. Compte tenu de l'impact économique de la qualité de ces mesures de risques pour la détermination des fonds propres des banques, il apparaît crucial de chercher à limiter ce risque de

[1] Le terme de sous-additivité d'une mesure de risque signifie que le risque agrégé d'un portefeuille ne peut être supérieur à la somme des risques de ses composant (*Cf.* Artzner *et alii*, 1999).

modèle. Nous développons dans cet article un cadre unifié d'agrégation des modèles de *VaR*, permettant de déterminer la *VaR* et l'*ES* en diversifiant le risque de modèle. Cela passe par un nouveau cadre d'analyse intégrant les différents modèles de quantiles et d'expectiles. De cette manière, nous obtenons des mesures de *VaR* et de *ES* diversifiées, limitant ainsi le risque de modèle, à l'instar de ce qui a pu être fait pour la volatilité dans le cadre d'approches multi-modèles (*Cf.* Visser, 2008).

Une littérature récente s'est focalisée sur les estimations des modèles de risque conditionnels autorégressifs. Il s'agit principalement des modèles de *VaR* autorégressifs conditionnels (*CAViaR* ; *Cf.* Engle et Manganelli, 2004) et des modèles multi-quantiles *CAViaR* (*Cf.* Kim *et alii*, 2008). Ces approches pour l'estimation de la *VaR* possèdent un avantage comparatif important car elles reposent sur un cadre de modélisation extensif et elles ne font pas appel à des hypothèses distributionnelles trop restrictives. Gouriéroux et Jasiak (2008) proposent, par exemple, une modélisation dynamique de la *VaR* comme une combinaison linéaire autorégressive de quantiles. Taylor (2008) établit, par exemple, le lien entre l'expectile et l'*ES*, ce qui amène à définir des expectiles comme des estimateurs de quantiles.

Cet article s'inscrit ainsi dans la continuité des travaux de Taylor (2008) et Gouriéroux et Jasiak (2008). L'approche proposée ici utilise la méthode de régression par les moindres carrés asymétriques (*ALS* pour *Asymmetric Least Squares*), introduite par Newey et Powell (1987), dont la solution est donnée par un expectile. A partir de la correspondance entre les expectiles et les quantiles, nous développons un cadre univarié pour la mise en œuvre de l'étude de la *VaR* à partir des expectiles. Ce cadre nous permet alors d'étendre l'approche *CAViaR* aux modèles de *VaR* et d'*ES* en agrégeant plusieurs modèles autorégressifs d'expectiles (approche *DARE* pour *Dynamic AutoRegressive Expectiles*).

Les résultats empiriques obtenus sur des données quotidiennes de l'indice CAC40 couvrant la période de juillet 1987 à mars 2009, montrent que cette approche agrégée permet de limiter le risque de modèle. Les tests de validation menés confirment ainsi la supériorité de l'approche *DARE* sur les principales méthodes traditionnelles proposées dans la littérature sur les mesures de risques extrêmes[2].

Cet article est organisé comme suit. La première section présente les formulations et les principales méthodes d'estimation des mesures de *Va*R et d'*ES*. La deuxième section introduit l'approche *DARE* par les expectiles. La troisième section présente les résultats empiriques de la comparaison entre les différentes méthodologies de calculs. La dernière section conclut.

Les Mesures de risques extrêmes

Nous présentons dans cette section les mesures de risques extrêmes de marché les plus utilisées par les institutions financières : la *Va*R et l'*ES*.

Durant ces dernières années, la gestion des risques est devenue un sujet majeur pour les chercheurs, les professionnels et les régulateurs. La *Va*R est une des mesures de référence pour l'estimation du risque extrême de marché. Elle est définie comme la perte potentielle que peut subir un portefeuille sur une période et pour un niveau de confiance donnés. Formellement, il s'agit de trouver le quantile associé à un niveau de probabilité tel que :

$$\mathrm{Prob}\left[r_t < -VaR_{\alpha,t} \right] = 1 - \alpha \,, \qquad (1)$$

où r_t est la variable aléatoire des rendements de l'actif ou du portefeuille calculée pour une périodicité donnée, et α est le niveau de confiance.

Du fait de nombreuses critiques récemment formulées contre la généralisation de l'utilisation de la *Va*R (*Cf.* Cheridito et Stadje, 2009), l'intérêt se porte désormais sur l'*ES*. Celui-ci correspond à la moyenne des rendements en dessous de la *Va*R estimée, pour une période et un niveau de confiance donné. Contrairement à la *Va*R, cette dernière mesure satisfait la propriété de

[2] Nous utilisons dans cet article plusieurs procédures de tests de validité des modèles de *Va*R (*Cf.* Berkowitz *et alii*, 2009 ; Hurlin et Tokpavi, 2007 et 2008).

sous-additivité. Plus formellement, l'*ES* peut s'écrire de la façon suivante (en utilisant les notations précédentes) :

$$ES_{\alpha,t} = -E\left[r_t \middle| r_t \leq -VaR_{\alpha,t}\right]. \tag{2}$$

Si nous considérons que la distribution des rendements est connue, nous avons :

$$ES_{\alpha,t} = -(1-\alpha)^{-1} \int_{-\infty}^{-VaR_{\alpha,t}} r_t f(r_t) dr_t, \tag{3}$$

où $f(.)$ est la fonction de densité de probabilité des rendements r_t.

Plusieurs approches sont utilisées pour estimer ces mesures de risque. Elles peuvent être regroupées en trois principales catégories : les méthodes paramétriques, les méthodes non-paramétriques et les méthodes semi-paramétriques (*Cf.* Engle et Manganelli, 1999).

L'approche paramétrique suppose que les rendements suivent une fonction de densité de probabilité définie, par exemple comme une distribution Normale ou *t-Student*. Les paramètres de la distribution sont ainsi spécifiés et la mesure de risque est alors déduite à partir des quantiles de la distribution estimée. Celle-ci dépend ainsi principalement des paramètres utilisés. Dans cette catégorie de mesures, celle issue de l'utilisation du modèle *RiskMetrics*[3] est d'une utilisation très répandue. Elle suppose que les rendements des actifs suivent une distribution Normale centrée avec une volatilité estimée par une moyenne mobile exponentielle sur données historiques. D'autres méthodes d'estimation de la volatilité (modèles *GARCH*, *Skew-Student*, *NIG*,…) sont aussi disponibles pour modéliser directement la densité (conditionnelle ou inconditionnelle) des rendements. Toutefois, ce type d'approche souffre principalement de problèmes liés à la spécification des densités supposées, qui ne permettent pas de rendre compte parfaitement des principaux faits stylisés des séries financières.

[3] Le modèle *RiskMetrics* est développé et commercialisé par « *RiskMetrics Group* » pour l'estimation des risques associés aux instruments financiers.

L'approche non-paramétrique ne nécessite aucune hypothèse explicite sur la distribution des rendements ; les calculs sont directement effectués sur les données observées. Celle-ci repose sur l'estimation empirique de la distribution des pertes possibles et leurs fréquences d'apparition en fixant un niveau de probabilité voulu. Le principal problème de cette approche concerne la définition de la fenêtre optimale pour l'estimation du quantile empirique : une fenêtre trop courte mènera à une erreur d'échantillonnage importante, alors qu'une fenêtre trop large limitera les réactions de la mesure aux changements de régimes des rendements.

Enfin, l'approche semi-paramétrique d'estimation de la *VaR* combine les deux précédentes approches. Les méthodes dites de Cornish-Fisher (fondées sur des expansions statistiques des densités de rendements autour d'une densité de référence) et celle des régressions sur quantiles font parties de cette famille. Cette dernière méthode d'estimation a pour avantage de ne nécessiter aucune hypothèse distributionnelle forte. La *VaR* autorégressive conditionnelle (en anglais *Conditional AutoRegressive Value-at-Risk*, ou *CAViaR*) introduite par Engle et Manganelli (2004), est définie ainsi directement à partir de quatre spécifications dynamiques autorégressives du risque.

L'approche *DARE*

Cet article propose un cadre d'agrégation des expectiles et des modèles de quantiles bien spécifiés, afin d'obtenir une bonne estimation des quantiles sur lesquels s'appuient les mesures de risque telles que la *VaR* et l'*ES*. Nous commençons dans cette section par introduire la définition formelle des expectiles, puis nous décrivons la façon dont nous les utilisons pour estimer la *VaR* et l'*ES*, en nous appuyant sur des modèles d'expectiles autorégressifs conditionnels (*Conditional AutoRegressive Expectiles*, ou *CARE*). Nous introduisons ensuite notre méthodologie *DARE* qui permet l'agrégation de modèles *CARE* en une méthode unifiée d'estimation des quantiles.

La *VaR* et l'*ES* peuvent être estimés *via* l'expectile calculé par la minimisation du programme suivant :

$$\hat{\mu}^{*}_{\tau,t} = Arg \min_{\mu_{\tau,t} \in R} \left\{ E\left[\left| \tau - 1\mathrm{I}_{\{r_t < \hat{\mu}_{\tau,t}\}} \right| \left(r_t - \hat{\mu}_{\tau,t} \right)^2 \right] \right\}, \qquad (4)$$

où le τ-expectile des r_t est estimé par le paramètre $\hat{\mu}_{\tau,t}$, et où $1\mathrm{I}_{\{.\}}$ est la fonction indicatrice et $|.|$ la fonction valeur absolue.

Les paramètres du modèle d'expectile conditionnel sont estimés par la méthode des moindres carrés asymétriques (*Asymmetric Least Squares*), qui peut être considérée comme l'analogue des moindres carrés ordinaires pour la régression sur quantiles tels que :

$$\hat{\beta}^{*} = Arg \min_{\beta \in R^n} \left\{ \sum_{t=1}^{T} \left\{ \left| \tau - 1\mathrm{I}_{\{r_t < \hat{\mu}_{\tau,t}(r_{t-1};\hat{\beta})\}} \right| \times \left[r_t - \hat{\mu}_{\tau,t}(r_{t-1};\hat{\beta}) \right]^2 \right\} \right\}, \qquad (5)$$

où $\hat{\mu}_{\tau,t}$ est l'estimation du modèle d'expectile conditionnel des r_t et $\hat{\beta}$ est le vecteur de paramètres estimés du modèle d'expectile conditionnel.

Nous pouvons directement utiliser les expectiles comme des estimateurs de quantiles. En effet, à chaque α-quantile correspond un τ-expectile (*Cf.* Jones, 1994, par exemple). Taylor (2008) donne de plus la relation qui lie l'expectile et l'*ES*, telle que :

$$ES_{\alpha,t} = \left[1 + \tau(1-2\tau)^{-1}\alpha^{-1} \right] \mu_{\tau,t}(r_t;\beta). \qquad (6)$$

Ainsi, l'*ES* conditionnel associé au niveau de probabilité α est proportionnel au γ-quantile conditionnel, qui peut être lui même être estimé par le τ-expectile. De plus, les estimations de quantiles peuvent être linéairement combinées grâce au modèle *DAQ* (pour Dynamic *Additive Quantile* en anglais) proposé par Gouriéroux et Jasiak (2008). Cette classe de modèles de quantiles dynamiques est définie par :

$$VaR_{\gamma,t} = \sum_{k=1}^{K} \left\{ a_k(r_{t-1}, y_{t-1}, \beta_k) \times VaR^{(k)}_{\gamma,t}(\beta_k) \right\}, \qquad (7)$$

où $VaR^{(k)}_{\gamma,t}(\cdot)$ correspond à la *k*-ième spécification des fonctions quantiles, avec $k = [1, 2, \ldots, K]$, et les $a_k(\cdot)$ sont des fonctions non-négatives des rendements et de variables exogènes passés, notés respectivement (r_{t-1}) et (y_{t-1}).

Ainsi, le modèle *DAQ* modélise un quantile à partir de différentes fonctions de quantile. Afin d'augmenter la robustesse du modèle conditionnel, nous pouvons aussi combiner ces fonctions grâce à une méthode multi-quantiles (*Cf.* Kim *et alii*, 2008). L'*ES* peut alors être exprimé comme une combinaison de quantiles dont les probabilités associées sont définies par l'équation (6), soit :

$$\underset{[1\times 1]}{ES_{\alpha,t}} = \underset{[1\times K]}{\mathbf{W}'_{\alpha,t}} \; \underset{[K\times 1]}{\mathbf{VaR}_{\gamma,t}} \quad , \tag{8}$$

avec :

$$\begin{cases} \mathbf{W}_{\alpha,t} = & [w_1 \times b_1 \quad w_2 \times b_2 \quad \ldots \quad w_K \times b_K]' \\ \\ \mathbf{VaR}_{\gamma,t} = & [VaR^{(1)}_{\gamma_1,t} \quad VaR^{(2)}_{\gamma_2,t} \quad \ldots \quad VaR^{(K)}_{\gamma_K,t}]' \end{cases} ,$$

et :

$$\begin{cases} ES^{(k)}_{\alpha,t} = b_k \; VaR^{(k)}_{\gamma_k,t}\left(\mu_{\tau_k}, \beta_k\right) \\ \\ b_k = \left[1 + \tau_k \left(1 - 2\,\tau_k\right)^{-1} \alpha^{-1}\right] \\ \\ \sum_{k=1}^{K} w_k = 1 \end{cases} ,$$

où $VaR^{(k)}_{\gamma_k,t}(\cdot)$ correspond à la *k*-ième spécification des fonctions quantiles associée à la probabilité γ_k, avec $k = [1, 2, \ldots, K]$.

L'estimation de l'*ES* associé à la probabilité α peut ainsi être obtenue en agrégeant linéairement K différentes fonctions de quantiles et en estimant la correspondance entre la probabilité α associée à l'*ES* de chaque modèle (noté $ES^{(k)}_{\alpha}$) et la probabilité γ_k associée à chaque fonction de quantiles (à l'aide du τ_k-expectile définit par l'équation 4). Toute combinaison linéaire convexe de K mesures de risque cohérentes donne une autre mesure de risque cohérente. L'approche *DARE* fournit ainsi une mesure de risque cohérente contenue dans l'ensemble convexe des mesures de risque qui la composent, et de définir ainsi une mesure spectrale de risque cohérente.

Résultats empiriques

Pour illustrer l'efficacité de l'approche *DARE* pour le calcul de la *Va*R, nous appliquons cette méthode au marché des actions françaises et nous la comparons aux méthodes communément utilisées. Nous utilisons les cours de clôture de l'indice CAC40 du 9 juillet 1987 au 18 mars 2009. Cette période comporte 5 659 rendements journaliers. Nous utilisons une fenêtre glissante de 4 années (1 044 rendements journaliers) pour ré-estimer quotidiennement et dynamiquement les paramètres pour les différentes méthodes. Les *Va*R anticipées ont été calculées pour chaque méthode sur 4 615 jours (environ 18 années). Cette étude considère l'estimation journalière des *Va*R conditionnelles aux seuils de 95% et 99%, communément utilisés par les institutions financières et les régulateurs.

Nous limitons notre comparaison aux méthodes de référence pour le calcul des risques extrêmes. Nous considérons tout d'abord la méthode non-paramétrique la plus largement utilisée qui est la *Va*R historique. Nous considérons ensuite la méthode *RiskMetrics* et le modèle *GARCH(1,1)* dans le cadre des approches paramétriques. Nous estimons aussi la *Va*R et l'*ES* avec des distributions *t-Student* et *NIG* en complément, pour mieux prendre en compte les rentabilités extrêmes. Les modèles *CAVia*R sont également utilisés, en appliquant la procédure d'estimation de Engle et Manganelli (2004). Nous calculons finalement l'approche *DARE* en agrégeant de manière équi-pondérée les modèles *CARE*.

Le tableau 1 présente les principaux résultats des tests de validation de la *Va*R développés à ce jour dans la littérature[4]. Pour chaque méthode et pour deux niveaux de quantile (5% et 1%), ce tableau présente la probabilité qu'une « bonne » mesure de *Va*R (au sens du test) puisse être rejetée à tort. Par exemple, pour le test des « exceptions » (Kupiec, 1995), les méthodes historique, Normale, *RiskMetrics* ou *CAViaR* asymétrique conduisent à des calculs de *Va*R qui ne sont pas appropriés. En combinant toutefois naïvement ces méthodes (moyenne des *Va*R), ce critère est alors respecté. De plus, agréger les méthodes *CAViaR* grâce aux modèles *CARE* dans l'approche *DARE*, nous permet aussi de respecter ce test.

Remarquons également que le critère d'indépendance des violations n'est pas rejeté quelle que soit la méthode pour la *Va*R à 95% (au seuil de 100%), alors que celui-ci est rejeté pour la *Va*R à 99% et pour la majorité des méthodes au seuil de 5%. Seuls les grands rendements non prévus semblent donc dépendants. Par ailleurs, nous remarquons aussi que le test des « *Exception Magnitudes* » conduit au rejet de l'hypothèse nulle au seuil de 1% quelle que soit la méthode et le niveau de la *Va*R (ce qui indique des tailles des violations particulièrement grandes).

De manière générale, aucune méthode de référence ne peut être considérée seule comme une bonne mesure pour l'ensemble des tests, mais quelques mesures semblent par contre non pertinentes. Nos résultats montrent également la supériorité de l'approche *CAViaR Indirect GARCH*, de l'approche moyenne naïve des *Va*R et de celle appelée *DARE* sur les autres méthodes. Les *Va*R étant mieux spécifiées dans l'approche *DARE*, nous avons aussi vérifié empiriquement que leurs agrégations dans le cadre de *Va*R conditionnelles donnaient des résultats de validations plus satisfaisants.

[4] Une documentation complète concernant les tests proposés ici (*i .e.* idée centrale du test, hypothèses alternatives et tests formels) est disponible sur demande auprès des auteurs.

Tableau 1 : Probabilités de rejeter à tort une « bonne » mesure de *VaR*

Tests :	*Exception Frequency* (1)	*Indep.* (2)	*Cond. / Uncond.* (3)	*Dynamic Quantile* (4)	*Exception Mag.* (5)	*GMM Duration* *Uncond.* (6)	*GMM Duration* *Cond.* (7)	*GMM Duration* *Indep.* (8)
***VaR* quotidienne à 95% selon la méthode :**								
Historique	**0,00*****	100,00	**0,00*****	**0,29*****	**0,00*****	**0,25*****	**0,00*****	**0,00*****
Normal	**0,00*****	100,00	**0,00*****	**0,19*****	**0,00*****	21,44	**0,00*****	**0,00*****
t-Student	64,68	100,00	90,04	3,31**	**0,00*****	70,02	**0,00*****	**0,00*****
Normal GARCH(1,1)	53,47	100,00	82,47	99,89	**0,00*****	52,43	56,37	37,27
RiskMetrics	**0,00*****	100,00	**0,00*****	98,11	**0,00*****	17,40	44,14	40,41
CAViaR Symétrique Absolu	30,80	100,00	59,47	98,72	**0,00*****	31,61	38,31	28,10
CAViaR Asymétrique	**0,00*****	100,00	**0,00*****	96,12	**0,00*****	5,89*	39,46	63,51
CAViaR Indirect GARCH	37,51	100,00	67,48	98,29	**0,00*****	37,80	41,46	23,46
CAViaR Adaptatif	82,66	100,00	97,63	93,50	**0,00*****	77,14	96,48	90,98
Moyenne naïve des *VaR*	93,28	100,00	99,64	100,00	**0,00*****	89,29	**0,01*****	**0,00*****
DARE VaR	34,04	100,00	63,48	98,22	**0,00*****	34,61	65,64	59,65
***VaR* quotidienne à 99% selon la méthode :**								
Historique	**0,03*****	**0,66*****	**0,00*****	99,40	**0,00*****	**0,16*****	**0,00*****	**0,00*****
Normal	**0,00*****	**0,00*****	**0,00*****	94,33	**0,00*****	**0,00*****	**0,00*****	**0,00*****
t-Student	**0,01*****	**0,94*****	**0,00*****	99,49	**0,00*****	**0,07*****	**0,00*****	**0,00*****
Normal GARCH(1,1)	**0,07*****	2,82**	**0,03*****	99,99	**0,00*****	**0,39*****	12,06	47,28
RiskMetrics	**0,01*****	**0,84*****	**0,00*****	99,95	**0,00*****	**0,07*****	2,97*	61,88
CAViaR Symétrique Absolu	5,02*	5,09*	2,19**	100,00	**0,00*****	8,61*	5,59*	7,37*
CAViaR Asymétrique	**0,16*****	2,30**	**0,05*****	99,88	**0,00*****	**0,64*****	**0,02*****	**0,11*****
CAViaR Indirect GARCH	32,22	15,22	21,98	99,99	**0,00*****	38,85	67,00	54,53
CAViaR Adaptatif	1,82**	**0,17*****	**0,04*****	99,97	**0,00*****	2,92**	**0,01*****	**0,01*****
Moyenne naïve des *VaR*	6,84*	4,64**	2,61**	100,00	**0,00*****	10,03*	**0,00*****	**0,00*****
DARE VaR	25,81	2,81**	4,73**	99,99	**0,00*****	32,17	12,98	9,32*

Source : *DataStream* ; données journalières de l'indice CAC40 du 9 juillet 1987 au 18 mars 2009 ; calculs des auteurs. Nous utilisons une fenêtre glissante de 4 années (1 044 rendements quotidiens) pour l'estimation dynamique des paramètres des différents modèles. Les prévisions de *VaR* ont été effectuées avec les 4 615 derniers jours pour chaque méthode. Le tableau fournit les probabilités de rejet à tort (*p-values* exprimées en pourcentage) de l'hypothèse nulle (qui correspond à une « bonne » propriété de la *VaR*) correspondant aux différents tests de validation des modèles de calcul de *VaR*. Les chiffres significatifs aux seuils de 10%, 5% et 1% sont respectivement signalés par un signe *, ** et ***. Les chiffres en gras correspondent à des rejets au seuil usuel de 1%, qui signale une mesure de *VaR* particulièrement non pertinente au regard du test spécifié. (1) Le test de l' « *Exception Frequency* » (*Unconditional Coverage test* de Kupiec, 1995) est calculé à partir du nombre de violations du modèle et vérifie si le taux d'exceptions est égal au seuil fixé. (2) L'*Independence test* (Christoffersen, 1998) mesure le degré d'indépendance sérielle des séquences de violation du modèle *VaR*. (3) Le *Conditional Coverage test* (Christoffersen, 1998), noté « Cond. / Uncond. », vérifie si le modèle de *VaR* est bien spécifié. Dans ce dernier cas, le taux de violations doit être égal au seuil, et les séquences de violation doivent être indépendantes. (4) Le *Dynamic Quantile test* (Engle et Manganelli, 2004) détermine la validité du modèle *VaR* par l'estimation d'un modèle linéaire liant la série de violations et certaines variables exogènes retardées. (5) Le test des *Exception Magnitudes* (Berkowitz, 2001) repose sur les amplitudes des violations et leurs caractères exceptionnels en amplitude. (6) à (8) Les *Generalized Method of Moment Duration-based tests* (Candelon *et alii*, 2008) considèrent les tests (1), (2) et (3) des modèles de *VaR* en appliquant l'approche par la méthode des moments généralisés (*Cf.* Bontemps et Meddahi, 2005).

L'approche *DARE* fournit un cadre homogène d'estimation des mesures de risques extrêmes, qui respecte la plupart des tests d'évaluation, et demeure adaptée pour les niveaux de probabilités associés couramment à la *VaR* et l'*ES*. En tant que méthode d'agrégation spécifique, elle permet de bénéficier de la diversification du risque de modèle qui demeure particulièrement importante pour l'estimation de la *VaR* et des *ES* associés à des niveaux extrêmes de probabilité.

Conclusion

Nous avons présenté dans cet article une nouvelle approche de modélisation de la *VaR* et de l'*ES* appelée *Dynamic AutoRegressive Expectiles* (*DARE*). Cette approche est fondée sur l'agrégation de nombreux modèles de risques extrêmes existants et permet de diversifier le risque de modèle inhérent à chacun d'entre eux. Nous montrons ainsi, utilisant différentes spécifications pour la *VaR* (Normale, Historique, *RiskMetrics*, *NIG*, *t-Student*, *GARCH* et *CAViaR*) et divers *backtests* (conditionnels et non conditionnels, prévision de distribution, tests fondés sur la duration) que le modèle *DARE* est plus robuste que les déterminations classiques de *VaR*. Par ailleurs, des tests complémentaires confirment ces résultats sur les modèles d'*ES*.

Pour prolonger cette étude, nous souhaitons introduire des fonctions de pondérations conditionnelles aux différents modèles agrégés dans l'approche *DARE*, afin de sélectionner dynamiquement les modèles de *VaR* les plus appropriés et de prendre ainsi explicitement en compte, par des pondérations optimisées, le risque de modèle dans le calcul des mesures de risques extrêmes.

Références bibliographiques

Artzner P., F. Delbaen, J. Eber et D. Heath, (1999), « Coherent Measures of Risk », *Mathematical Finance 9(3),* 203-228.

Basle Committee on Banking Supervision, (1996), *Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks*, Bank for International Settlements, 63 pages.

Berkowitz J., (2001), « Testing Density Forecasts with Applications to Risk Management », *Journal of Business and Economics Statistics 19(4)*, 465-474.

Berkowitz J., P. Christoffersen et D. Pelletier, (2009), « Evaluating Value-at-Risk Models with Desk-level Data », *Management Science*, forthcoming, 33 pages.

Bontemps C. et N. Meddahi, (2005), « Testing Normality: A GMM Approach », *Journal of Econometrics 124(1)*, 149-186.

Candelon B., G. Colletaz, C. Hurlin et S. Tokpavi, (2008), « Backtesting Value-at-Risk: A GMM Duration-based Test », *Working Paper*, 40 pages.

Cheridito P. et M. Stadje, (2009), « Time-inconsistency of VaR and Time-consistent Alternatives », *Finance Research Letters 6(1)*, 40-46.

Christoffersen P., (1998), « Evaluating Interval Forecasts », *International Economic Review, 39(4)*, 841-862.

Engle R. et S. Manganelli, (1999), « Value-at-Risk Models in Finance », *ECB Working Paper 75*, 40 pages.

Engle R. et S. Manganelli, (2004), « CAViaR: Conditional AutoRegressive Value-at-Risk by Regression Quantile », *Journal of Business and Economic Statistics 22(4)*, 367-381.

Gouriéroux C. et J. Jasiak, (2008), « Dynamic Quantile Models », *Journal of Econometrics 147(1)*, 198-205.

Hurlin C. et S. Tokpavi, (2007), « Un test de validité de la Value-at-Risk », *Revue Economique 58(3)*, 599-608.

Hurlin C. et S. Tokpavi, (2008), « Une évaluation des procédures de Backtesting : Tout va pour le mieux dans le meilleur des mondes », *Finance 29(1)*, 53-80.

Jones M., (1994), « Expectiles and M-quantiles are Quantiles », *Statistics and Probability Letters 20(2)*, 149-153.

Kim T., S. Manganelli et H. White, (2008), « Modelling AutoRegressive Conditional Skewness and Kurtosis with Multi-quantile CAViaR », *ECB Working Paper 957*, 40 pages.

Kupiec P., (1995), « Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models », *Journal of Derivatives 3(2)*, 73-84.

Newey W. et J. Powell, (1987), « Asymmetric Least Squares Estimation and Testing », *Econometrica 55(4)*, 819–847.

Taylor J., (2008), « Estimating Value-at-Risk and Expected Shortfall using Expectiles », *Journal of Financial Econometrics 6(2)*, 231-252.

Visser M., (2008), « Ranking and Combining Volatility Proxies for GARCH and Stochastic Volatility Models », *MPRA Paper 4917*, 31 pages.